Tentamen Sterren & Planeten
(21.10.2009, 13:00 – 16:00)

Iedere deelopgave levert 5 punten op. 1c wordt niet meegenomen in de berekening, dus in totaal is het mogelijk om 55 punten te halen.

1. **De aarde is omgeven door een netwerk van geostationaire satellieten (kunstmanen) die onder meer voor communicatie en televisie worden gebruikt (in een geostationaire baan duurt een omloop 24 uur).**

   (a) **Bereken de snelheid (in km/h) en afstand (in km) vanaf het centrum van de aarde voor een geostationaire kunstmaan.**

   Derde wet van Kepler of $F_{\text{grav}} = F_{\text{centr}}$:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$
$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{GMP^2}{4\pi^2}}$$
$$\Rightarrow a = 4.22 \times 10^9 \text{ cm} = 42200 \text{ km}$$

$$v = \frac{2\pi a}{P}$$
$$= 11055 \text{ km/h}$$

   (b) **Leg in je eigen woorden uit wat er zou veranderen voor de kunstmaan, als de dichtheid van de aarde twee keer zo klein zou zijn als nu (massa blijft hetzelfde).**

   Als de dichtheid twee keer kleiner is, is het volume van de aarde twee keer zo groot, dus ook de straal is groter. De afstand tussen de kunstmaan en het centrum van de aarde zou niet veranderen (hangt alleen van de massa af), maar de afstand naar het oppervlak van de aarde wel: die wordt kleiner. De snelheid van de kunstmaan verandert ook niet omdat de baan niet verandert.

   (c) **Bereken de verhouding tussen de getijdenwerkingen (verandering in versnelling Δa) op de kunstmaan veroorzaakt door de aarde en de zon (verhouding van Δa's). Leid eerst een formule af voor Δa.**

   Getijdenwerking is het verschil in zwaartekracht tussen twee (tegenovergelegen) kanten van één lichaam:

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{grav}} &= \frac{GMm}{r^2} \\
\frac{dF}{dr} &= -\frac{2GMm}{r^3} \\
\Delta F &= \frac{dF}{dr}\Delta r = -\frac{2GMm}{r^3}\Delta r \\
\Rightarrow \Delta a &= \frac{\Delta F}{m} \\
&= -\frac{2GM}{r^3}\Delta r \\
\Rightarrow \frac{\Delta a_{\mathrm{aarde}}}{\Delta a_{\mathrm{zon}}} &= \frac{M_{\mathrm{aarde}}}{M_{\mathrm{zon}}}\frac{r^3_{\mathrm{zon}}}{r^3_{\mathrm{aarde}}} \\
&= 1.34 \times 10^5
\end{aligned}
$$

2. **De 21 cm lijn van neutraal waterstof correspondeert met de spin overgang van het elektron in het atoom. Het energieverschil tussen de twee toestanden is extreem klein, en de statistische gewichten van het bovenste en het onderste niveau zijn 3 en 1, respectievelijk. De absorptie doorsnede voor de 21 cm lijn bij 100 K is 1.4×10^{-21} cm^2/H-atoom.**

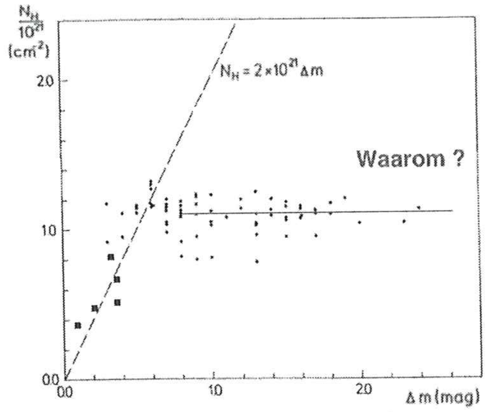
   (a) **Bereken de optische diepte van het licht van de 21 cm lijn van een typische warme interstellaire wolk (T = 100 K) met een grootte van 10 pc en een dichtheid van 50 H-atomen cm^{-3}. Met welke factor zou de intensiteit van de straling worden afgezwakt als deze door de wolk heen gaat?**

$$
n = 50\ \mathrm{cm}^{-3}, l = 10\ \mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{19}\ \mathrm{cm}, \sigma_\lambda = 1.4 \times 10^{-21}\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{H}-\mathrm{atoom}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau &= nl\sigma_\lambda \\
&= 2.16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 \exp(-\tau) \\
&= 0.115\, I_0
\end{aligned}
$$

De intensiteit van de straling zou met een factor ~ 9 afgezwakt worden.



(b) **De afbeelding hierboven laat de observationeel gevonden relatie zien tussen de kolom dichtheid $N_{\rm H}$ van atomair waterstof en extinctie Δm. Leg in je eigen woorden uit wat we van deze grafiek leren en waarom $N_{\rm H}$ afvlakt bij hoge extinctie.**

$N_{\rm H}$ meet de hoeveelheid (kolom dichtheid) interstellair gas en Δm de hoeveelheid interstellair stof. De afbeelding geeft aan dat gas en stof in het interstellair medium gemengd zijn en dat er een lineaire relatie tussen de twee is (constante verhouding). Op hogere kolom dichtheden vormt uit atomair waterstof moleculair waterstof, H_2. Dit valt niet meer te meten met behulp van de 21 cm lijn (namelijk de spin overgang van atomair waterstof) en zit dus niet in $N_{\rm H}$. Daarom gaat $N_{\rm H}$ niet verder omhoog terwijl de extinctie veroorzaakt door stof wel omhoog gaat.

(c) **Beschouw alleen de twee energieniveaus van waterstof die de 21 cm lijn veroorzaken. Bereken de verhouding van de bezettingen van deze niveaus voor de bovengenoemde wolk ($n_{\rm H}$ = 50 cm^{-3}, $T = 100$ K).**

De Boltzmann vergelijking geeft de verhouding tussen de bezetting van twee energie niveaus van hetzelfde atoom (ion):

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i}\exp\left(-(E_j - E_i)/kT\right)$$

$$\text{hier is}\quad (E_j - E_i) = E_{\rm foton} = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{met} \quad \lambda = 21 \text{ cm}$$

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{3}{1}\exp\left(-9.45\times10^{-18}\ \text{erg}/1.38\times10^{-14}\ \text{erg}\right)$$
$$= 2.9979$$

De verhouding van de bezetting van de twee energie niveaus is ~ 3.

3. **Sterren brengen het grootste deel van hun leven door op de hoofdreeks, waar ze waterstof omzetten in helium.**

   (a) **Maak een schatting voor de levensduur die een ster van één zonsmassa zou hebben, als hij energie zou produceren door waterstof met een constante snelheid te fuseren (4 protonen →**

^{4}He). Neem aan dat de ster initieel alleen uit waterstof bestaat.

Bij de fusie van 4 protonen naar één Helium atoom komt een energie E vrij:

$$\begin{aligned} E &= \Delta m c^2 \\ &= (4m_{\mathrm{p}} - m(^4\mathrm{He}))c^2 \\ &= (4.61 \times 10^{-26}\ \mathrm{g})(2.9979 \times 10^{10})^2\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}^2 \\ &= 4.14 \times 10^{-5}\ \mathrm{erg} \end{aligned}$$

In de ster zijn $N = 1.189 \times 10^{57}$ protonen, en dus kunnen er $N/4 = 2.97 \times 10^{56}$ reacties verlopen. In totaal komt er dus de volgende hoeveelheid energie E_{tot} vrij:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{tot}} &= 2.97 \times 10^{56} \cdot 4.14 \times 10^{-5}\ \mathrm{erg} \\ &= 1.23 \times 10^{52}\ \mathrm{erg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{E_{\mathrm{tot}}}{L_\odot} \\ &= 3.25 \times 10^{18}\ \mathrm{s} = 1.03 \times 10^{11}\ \mathrm{yr} \end{aligned}$$

De levensduur is ongeveer 10^{11} jaar.

(b) **Beschrijf in je eigen woorden hoe de zwaardere elementen op een andere manier binnen in sterren kunnen worden gecreëerd dan met nucleaire fusie.**

De zwaardere elementen kunnen opgebouwd worden door invang van neutronen, (Z, A) + n $\rightarrow$ (Z, A + 1). Het neutron kan vervallen in één proton (β-verval). Als het β-verval sneller is dan het toevoegen van het volgende neutron spreken we van het "s-process", langzame neutronen invang. Het resultaat zou dan (Z, A + 1) $\rightarrow$ (Z + 1, A + 1) + e^- + $\overline{\nu}$ (electron plus neutrino) zijn. Als het β-verval langzamer is dan de neutronen invang is het resultaat (Z, A + 1) + n $\rightarrow$ (Z, A + 2) ("r-process", snelle neutronen invang).

(c) **Maak een schatting hoe lang de zon zichzelf van energie kan voorzien met behulp van potentiele energie als de nucleaire fusie in het centrum zou stoppen.**

Zie ook 3a. Het potentiaal van de ster is

$$\begin{aligned} U &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\ &= 2.27 \times 10^{45}\ \mathrm{erg} \end{aligned}$$

met $E_{\text{tot}} = |U|$ als totale energie die er ter beschikking is als de fusie stopt.

$$\begin{aligned} t &= \frac{E_{\text{tot}}}{L_\odot} \\ &= \frac{2.27 \times 10^{45} \text{ erg}}{3.85 \times 10^{33} \text{ erg/s}} \\ &= 5.91 \times 10^{14} \text{ s} = 1.87 \times 10^{7} \text{ yr} \end{aligned}$$

De ster kan zichzelf nog ongeveer 20 miljoen jaar van energie voorzien.

4. **Sterren stralen zoals een zwart lichaam en wij kunnen hun temperatuur en chemische samenstelling afleiden van hun spectra. Bij het analyseren van het licht van sterren zijn afstanden essentieel om hun schijnbare helderheid te begrijpen.**

   (a) **Licht in je eigen woorden drie verschillende technieken toe die in de sterrenkunde gebruikt worden om afstanden te berekenen en geef daarbij ongeveer aan tot welke afstand elke techniek geschikt is.**

   i. <u>Trigonometrische parallax:</u> We meten hoe de positie van een ster verandert gedurende een half jaar ten opzichte van de sterren die nog verder weg staan en dus niet lijken te bewegen. Deze hoek p is klein en wordt in boogseconden gemeten. Tegenwoordig kunnen we met een nauwkeurigheid van milliboogseconden meten, dus tot een afstand van ongeveer 1 kpc ($d(\text{pc}) = \frac{1}{p('')}$).

   ii. <u>Spectroscopische parallax:</u> Als we het spectrum van één ster kunnen waarnemen, is het mogelijk zijn spectraaltype vast te stellen. Daaruit volgt met tabellen de absolute helderheid van de ster. Vervolgens gebruiken we de "distance modulus" om met behulp van de waargenomen schijnbare en afgeleide absolute magnitude de afstand te bepalen:

   $$m_V = M_V + 5 \log(\frac{d}{10 \text{ pc}}) \quad .$$

   Deze methode werkt tot op de afstanden van sterrenstelsels die dichtbij staan (lokale groep van stelsels), zodat we nog net spectra van de sterren kunnen nemen.

   iii. <u>Cepheïden:</u> Er bestaat een periode-lichtkracht relatie voor veranderlijke Cepheïden. Als we dus de schijnbare magnitude, kleur en de periode van deze sterren meten, kunnen we direct de absolute helderheid bepalen en daaruit de afstand afleiden. Deze methode werkt zolang we de sterren in andere stelsels nog net kunnen onderscheiden en dus hun periode en schijnbare helderheden kunnen meten. Dit geldt voor stelsels binnen $\sim$ 20 Mpc.

   (b) **Bereken hoeveel gloeilampen van 100 W van energie voorzien kunnen worden door een zonnepaneel op de aarde van 10 m^2 dat zichtbare straling van de zon absorbeert. Neem aan dat de efficientie van het zonnepaneel 10% is, dat 50% van de totale energie van de zon wordt uitgezonden in zichtbaar licht, en verwaarloos effecten van de atmosfeer van de aarde.**

   De totale hoeveelheid energie die op het zonnepaneel ($A = 10 \text{ m}^2 = 10^5 \text{ cm}^2$) op de aarde terecht komt

($d = 1.496 \times 10^{13}$ cm) is:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{L_\odot}{4\pi d^2} A \cdot 0.1 \cdot 0.5 \\
&= 684.5 \text{ W}
\end{aligned}
$$

Dus kunnen we hiermee 6 gloeilampen van 100 W van energie voorzien.

(c) **Leid een relatie af tussen de flux van een zwart lichaam per golflengte interval en per frequentie interval, $I(\lambda, T)$ and $I(\nu, T)$.**

Uit de definitie van intensiteit volgt:

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(T) d\lambda &= I_\nu(T) d\nu \\
\nu &= \frac{c}{\lambda} \\
\Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} &= -\frac{c}{\lambda^2} \\
\Rightarrow I_\lambda(T) &= \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| I_\nu(T) \\
&= \frac{c}{\lambda^2} I_\nu(T)
\end{aligned}
$$

Het minteken geeft alleen aan dat golflengte en frequentie verschillende kanten op gaan.